$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Θα το δείξουμε για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, αλλά ισχύει γενικά.

$\mathbb{R}^{n^2} = M_n(\mathbb{R})$ τοπολογικός διανυσματικός χώρος $\supseteq Gl_n(\mathbb{R})$ ομάδα (τοπολογική) $\supseteq G$

$T_G = \{\gamma'(0),\ \gamma : (-c, c) \to G$ διαφορίσιμη, $\gamma(0) = I\} \leq M_n(\mathbb{R})$

- $\dim T_G$ διαν. υποχώρου $= \dim G$.

  $G = O(n), U(n), Sp(n)$

Αντίστοιχα, ορίσαμε $so(n), su(n), sp(n)$ πραγματικοί διαν. υποχωροι

Διαστάσεις: $\dfrac{n(n-1)}{2}$, n^2, $2n^2+n$

Θ.ν.δ.ο. $\dim O(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\dim U(n) = n^2$, $\dim Sp(n) = 2n^2+n$.

- Αυτό θα το κάνουμε υποθέτωντας ότι $T_{O(n)} = so(n)$, $T_{U(n)} = su(n)$, $T_{Sp(n)} = sp(n)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορίζουμε την εκθετική απεικόνιση στους πίνακες $e : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ με τύπο $e^A = I + A + \dfrac{A^2}{2} + \dots$ όταν ορίζεται.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Όταν ο A διαγωνοποιείται ($A = P\Lambda P^{-1}$, Λ διαγώνι...

$$e^A = e^{P\Lambda P^{-1}} = Pe^{\Lambda}P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2} & \\ \emptyset & & \ddots \ e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η σειρά e^A συγκλίνει για κάθε πραγματικό πίνακα A

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με i,j θα συμβολίζουμε το i,j στοιχείο του αντίστοιχου πίνακα. Άρα το i,j στοιχείο του e^A είναι η σειρά

$$I_{i,j} + (A)_{ij} + \left(\frac{A^2}{2}\right)_{ij} + \left(\frac{A^3}{3!}\right)_{i,j} + \dots$$

$\downarrow$ 0 ή 1 $\quad \downarrow$ a_{ij}

Με m θα συμβολίζουμε το $\max\{|a_{i,j}|, 1 \le j, i \le n\}$

Άρα $|a_{i,j}| \le m \quad \forall i,j$

$$|(A)|_{i,j}$$

$$\left|\frac{A^2}{2}\right|_{ij} \le \frac{nm^2}{2}$$

$$\left|\frac{A^3}{3!}\right|_{ij} \le \frac{n^2m^3}{3!} \quad \left(A^3 = A^2 A \quad \underbrace{n\,n\,m^2}_{n \text{ στοιχεία}} \; m^{\leftarrow \text{μέγιστο } A} \quad \downarrow \text{μέγιστο } A^2\right)$$

$$\left|\frac{A^k}{k!}\right| \le \frac{n^{k-1}m^k}{k!}$$

Άρα το i,j στοιχείο του e^A θα φράσσεται από τη σειρά

$1+m+\frac{nm^2}{2}+\frac{n^2m^3}{3!}+\dots$

Αρκεί ν.δ.ο. η παραπάνω σειρά συγκλίνει.

$\dfrac{\frac{n^k m^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{n^{k-1}m^k}{k!}} = \dfrac{\boxed{nm}}{k+1}$ ← σταθερός όρος $\lim_{k\to\infty} \frac{nm}{k+1} = 0$ < Κριτήριο Λόγου

Άρα η σειρά συγκλίνει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$e^{O_{n\times n}} = I$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $AB=BA$ τότε $e^{A+B}=e^A e^B$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$e^A = I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\dots$

$e^B = I+B+\frac{B^2}{2}+\frac{B^3}{3!}+\dots$

$e^{A+B} = I+(A+B)+\frac{(A+B)^2}{2}+\frac{(A+B)^3}{3!}+\dots$

- $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2 \overset{AB=BA}{=\!=} A^2+2AB+B^2$

τα ίδια ισχύουν για $(A+B)^3$ κλπ.

$e^{A+B} = I+A+B+\frac{A^2}{2}+\frac{2AB}{2}+\frac{B^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\frac{3A^2B}{3!}+\frac{3AB^2}{3!}+\frac{B^3}{3!}+\dots$

$e^A \cdot e^B$

Πρώτα πολ/ζω $I \cdot e^B$

Έπειτα πολ/ζω $A \cdot e^B$

$\quad -\text{"}- \quad \frac{A^2}{2} e^B$ κ.ο.κ

Επομένως θα πάρω όλα τα στοιχεία του e^{A+B}

Άρα $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ τότε ο e^A έχει μη-μηδενική ορίζουσα.

Δηλ. ο e^A είναι αντιστρέψιμος πάντα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$e^A \cdot ? = I = e^{O_{n\times n}}$$

$$A + (-A) = O_{n\times n}$$

$$A(-A) = (-A) \cdot A \Rightarrow e^{A+(-A)} = e^A e^{(-A)}$$

$$I = e^A e^{-A} \Rightarrow \exists (e^A)^{-1}$$

Άρα $e: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν $A \in SO(n)$ (δηλ. $A + A^t = O_{n\times n}$), τότε e^A είναι ορθογώνιος

$e: SO(n) \rightarrow O(n)$

"Τώρα θα το δείξω

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$A + A^t$ και $AA^t = A^t A$

$$e^{O_{n\times n}} = e^{A+A^t} = e^A e^{A^t} = e^A (e^A)^t = I \Rightarrow e^A \text{ είναι ορθογώνιος}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \in SO(2)$$

$$e^{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^2}{2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^3}{3!} + \dots$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix}$$

Άρα $e^{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix} +$

$$\frac{1}{4!}\begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 & -x^5 \\ x^5 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Το 1,1 στοιχείο, θα είναι η σειρά:

$$1 + 0 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \dots \quad (= \cos x)$$

Το 2,2 στοιχείο είναι το ίδιο με το 1,1.

Το 1,2 στοιχείο θα είναι η σειρά:

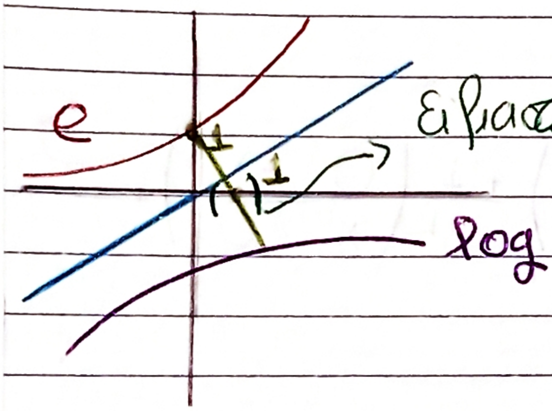
$$0 - x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots = -\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = -\sin x$$

Επομένως $e^A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

- $e^{\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα η e δεν είναι 1-1, αφού και $e^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Έχουμε άπειρα στοιχεία που "χτυπάνε" τον ταυτοτικό.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ e^x



Εμφανίζει σε αυτή την περιοχή U

Για να ορίσουμε την λογαριθμική απεικόνιση θα θεωρούμε ότι οι πίνακες μας λαμβάνουν τιμή από μια "μικρή" ανοικτή περιοχή του ταυτοτικού.
(επειδή η e^A δεν είναι 1-1 περιορίζουμε σε μια ανοικτή περιοχή)
$M_n(X)$ τοπολ. διαν. χώρος $\supseteq GL_n(\mathbb{R})$ τοπολ. ομάδα.
Θεωρούμε μια "μικρή" (κοντά) περιοχή του I.

Ορισμός

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ορίζουμε τη λογαριθμική απεικόνιση από μια "μικρή" ανοικτή περιοχή U του I με τύπο:

$\log : U \to M_n(\mathbb{R})$

$$\log A = (A-I) - \frac{(A-I)^2}{2} + \frac{(A-I)^3}{3} - \frac{(A-I)^4}{4} + \dots$$

εάν αυτή ορίζεται.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η σειρά $\log A$ συγκλίνει για κάθε $A \in U$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $Y = A - I$, $Y = (Y_{ij})$. Άρα $|Y_{ij}| < \varepsilon$ για κάποιο μικρό $\varepsilon > 0$. Αντίστοιχα, θα θεωρήσουμε τα i,j στοιχεία των πινάκων στη σειρά $\log A$.

$$\log A = Y - \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} - \frac{Y^4}{4} + \dots$$

Θα θεωρήσουμε τη σειρά που δίνεται από το άθροισμα των i,j στοιχείων.

$$Y_{i,j} - \frac{1}{2}(Y^2)_{i,j} + \frac{1}{3}(Y^3)_{i,j} - \frac{1}{4}(Y^4)_{i,j} + \dots$$

Αυτή φράσσεται από την αντίστοιχη σειρά με απόλυτες τιμές.

$$|Y_{i,j}| + \frac{1}{2}|(Y)^2_{i,j}| + \frac{1}{3}|(Y)^3_{i,j}| + \dots$$

$|Y_{i,j}| < \varepsilon$

$$\frac{1}{2}|(Y)^2_{ij}| < \frac{n\varepsilon^2}{2}$$

Αντίστοιχα, $\frac{1}{3}|(Y)^3_{ij}| < \frac{n^2\varepsilon^3}{3}$

Άρα $\frac{1}{k} |(Y)_{ij}^{k}| < \frac{n^{k-1}\varepsilon^{k}}{k}$

Μελετάμε το πηλίκο $\frac{\frac{n^{k-1}\varepsilon^{k}}{k}}{\frac{n^{k-2}\varepsilon^{k-1}}{k-1}} = n\varepsilon\left(\frac{k-1}{k}\right) = n\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)$

Άρα το πηλίκο συγκλίνει στο 0.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Όταν θα μιλάμε για την log ενός πίνακα ο πίνακας θα είναι στοιχείο μιας περιοχής U του I. Όταν θα μιλάμε για την e ενός πίνακα ο πίνακας θα είναι στοιχείο μιας περιοχής V του μηδενικού πίνακα.

ΠΡΟΤΑΣΗ

α) $\forall A \in V$ έχουμε $\log e^{A} = A$

β) $\forall X \in U$ έχουμε $e^{\log X} = X$

5.4.1 Ασκήσεις

1) Έστω η καμπύλη $\alpha : (-1,1) \to M_3(\mathbb{R})$ η οποία δίνεται από

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} cost & sint & 0 \\ -sint & cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι η α είναι καμπύλη στην $SO(3)$ και βρείτε την $\alpha'(0)$.

2) Έστω η καμπύλη $\beta : (-1,1) \to M_3(\mathbb{R})$ με τύπο

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cost & sint \\ 0 & sint & cost \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\beta'(0)$ και δείξτε ότι $(\alpha\beta)' = \alpha'(0) + \beta'(0)$.

3) Έστω A ένας $3x3$ αντιθετοσυμμετρικός πίνακας. Δείξτε ότι ο A^2 είναι συμμετρικός αλλά ο A^3 μπορεί να μην είναι.

4) Έστω $B \in O(3) - SO(3)$. Δείξτε ότι η σειρά $logB$ μπορεί να μην συγκλίνει.